

## Perturbations thermiques du système balancier - spiral

### Balancier bimétallique à vis à serge coupée - Optimisation

➔ Référence :D:\Résonateur (TE)\Data\Masse\_vol - Coef\_th - Mod\_E.mcd(R)

### Chronomètre - Balancier bimétallique à vis à serge coupée

➔ Référence :D:\Résonateur (TE)\Data\Chronomètre.mcd(R)

$$T_0 = 0.4 \text{ s} \quad f = 2.5 \text{ Hz} \quad \omega_0 := 2 \cdot \pi \cdot f \quad \Theta := 30 \quad \Theta_{\text{ambiante}} := 20$$

### Coefficients de dilatation et constantes élastiques

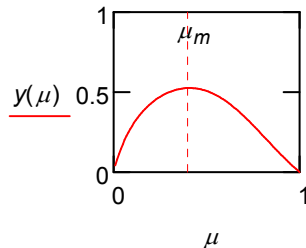
$$\alpha_1 := \alpha_{\text{acier}} \quad \alpha_1 = 1.15 \times 10^{-5} \quad \alpha_2 := \alpha_{\text{laiton}} \quad \alpha_2 = 1.85 \times 10^{-5} \quad \gamma_{\text{acier}} = -2.4 \times 10^{-4}$$

$$E_1 := E_{\text{acier}} \quad E_1 = 2.1 \times 10^{11} \text{ Pa} \quad E_2 := E_{\text{laiton}} \quad E_2 = 1 \times 10^{11} \text{ Pa}$$

### Epaisseur des bilames pour une compensation optimale

$$y_M := \frac{3}{2} \cdot \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{e_s} \cdot \Theta \quad \xi := \frac{E_1}{E_2} \quad y(\mu) := y_M \cdot \left[ 1 + \frac{[(1-\mu)^2 - \mu^2 \cdot \xi]^2}{4 \cdot \xi \cdot \mu \cdot (1-\mu)} \right]^{-1} \quad \mu_m := \frac{1 - \sqrt{\xi}}{1 - \xi}$$

$$\mu := 0, \frac{1}{100} \dots 1$$



$$e_1 := 0.245 \cdot \text{mm}$$

$$e_2 := e_1 \cdot \sqrt{E_1 \cdot E_2}^{-1} \quad e_2 = 0.355 \text{ mm}$$

$$\mu_m = 0.408 \quad e_{bs} := \frac{e_1}{\mu_m} \quad e_{bs} = 0.6 \text{ mm}$$

Contrôle

$$e_1 + e_2 = 0.6 \text{ mm}$$

### Masse et moment d'inertie de la serge à température ambiante

$$D_{s\_ext} = 19.2 \text{ mm} \quad R_0 = 9.245 \text{ mm} \quad h_s = 1.2 \text{ mm} \quad \rho_1 := 7.8 \cdot 10^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \quad \rho_2 := 8.7 \cdot 10^3 \cdot \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$$

$$M_1 := \pi \cdot \rho_1 \cdot h_s \cdot [R_0^2 - (R_0 - e_1)^2] \quad M_2 := \pi \cdot \rho_2 \cdot h_s \cdot [(R_0 + e_2)^2 - R_0^2] \quad M_{\text{serge}} := M_1 + M_2$$

$$J_{\text{serge}} := \frac{1}{2} \cdot M_1 \cdot [R_0^2 + (R_0 - e_1)^2] + \frac{1}{2} \cdot M_2 \cdot [(R_0 + e_2)^2 + R_0^2] \quad J_{\text{serge}} = 304.3 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2 \quad M_{\text{serge}} = 350.9 \text{ mg}$$

### Rayon de courbure de la serge et coefficient de dilatation de la soudure en fonction de la température

$$D := 4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}^2 + (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)^2 \quad m := \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2 \cdot R_0}$$

$$M := (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot (E_2 \cdot e_2 - E_1 \cdot e_1) - m \cdot (E_2 \cdot e_2^2 + E_1 \cdot e_1^2) \quad m = 3.786 \times 10^{-4} \text{ m}^{-1}$$

$$N := \frac{3}{2} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot (E_2 \cdot e_2^2 + E_1 \cdot e_1^2) - 2 \cdot m \cdot (E_2 \cdot e_2^3 - E_1 \cdot e_1^3) \quad D = 2.631 \times 10^9 \text{ m}^4 \text{ Pa}^2$$

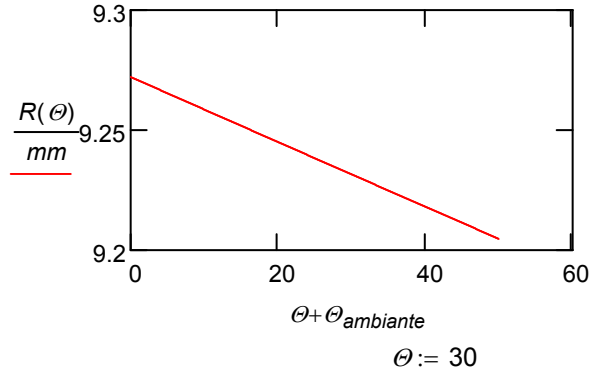
$$y(\Theta) := \frac{2 \cdot N \cdot (E_2 \cdot e_2 + E_1 \cdot e_1) - 3 \cdot M \cdot (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)}{D} \cdot \Theta \quad y(\Theta) = 0.523 \text{ m}^{-1}$$

$$z(\Theta) := \frac{2 \cdot M \cdot (E_2 \cdot e_2^3 + E_1 \cdot e_1^3) - N \cdot (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)}{D} \cdot \Theta \quad z(\Theta) = -2.09 \times 10^{-5}$$

$$x(\vartheta) := y(\vartheta) - \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2 \cdot R_0} \cdot \vartheta \quad g(\vartheta) := z(\vartheta) + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \cdot \vartheta \quad x(\vartheta) = 0.474 \text{ m}^{-1}$$

$$R(\vartheta) := \left( x(\vartheta) + \frac{1}{R_0} \right)^{-1} \quad R(\vartheta) = 9.20465 \text{ mm} \quad \frac{g(\vartheta)}{\vartheta} = 1.43 \times 10^{-5}$$

$$\vartheta := -20, -19.9.. 30$$



### Formules approchées

$$y_a(\vartheta) := 6 \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \frac{E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}}{4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}^2 + (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)^2} \cdot \vartheta \quad y_a(\vartheta) = 0.52497 \text{ m}^{-1}$$

$$z_a(\vartheta) := \frac{1}{2} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1) \cdot \frac{E_2^2 \cdot e_2^4 - E_1^2 \cdot e_1^4 + 4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs} \cdot (e_1 - e_2)}{4 \cdot E_1 \cdot E_2 \cdot e_1 \cdot e_2 \cdot e_{bs}^2 + (E_2 \cdot e_2^2 - E_1 \cdot e_1^2)^2} \cdot \vartheta \quad z_a(\vartheta) = -1.926 \times 10^{-5}$$

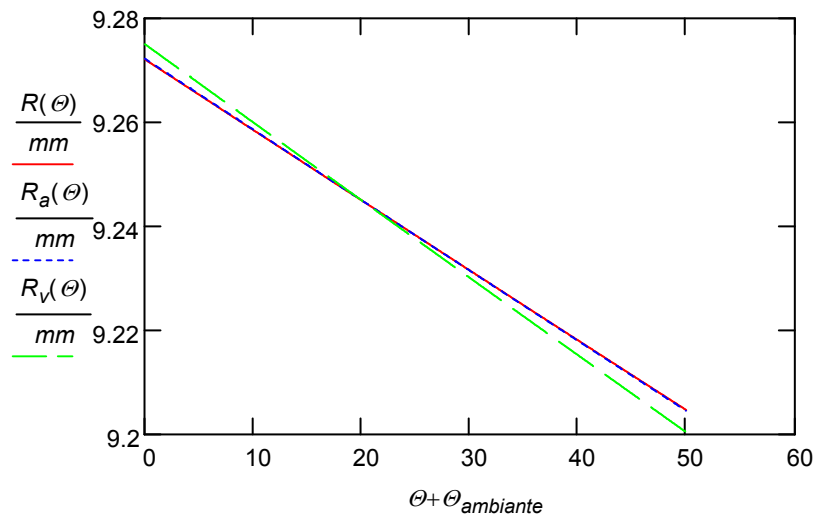
$$x_a(\vartheta) := y_a(\vartheta) - \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2 \cdot R_0} \cdot \vartheta \quad g_a(\vartheta) := z_a(\vartheta) + \frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2} \cdot \vartheta \quad x_a(\vartheta) = 0.476 \text{ m}^{-1}$$

$$R_a(\vartheta) := \left( x_a(\vartheta) + \frac{1}{R_0} \right)^{-1} \quad R_a(\vartheta) = 9.20447 \text{ mm} \quad \frac{g_a(\vartheta)}{\vartheta} = 1.436 \times 10^{-5}$$

Formule de Villarceau  $\frac{\alpha_2 + \alpha_1}{2 \cdot R_0} \cdot \vartheta = 0.049 \text{ m}^{-1} \quad y_a(\vartheta) = 0.52497 \text{ m}^{-1} \quad x_v(\vartheta) := y_a(\vartheta)$

$$R_v(\vartheta) := \left( x_v(\vartheta) + \frac{1}{R_0} \right)^{-1} \quad R_v(\vartheta) = 9.20035 \text{ mm}$$

$$\vartheta := -20, -19.9.. 30$$



## Variation thermique du moment d'inertie du balancier

### Moment d'inertie de la serge déformée

Approximation du moment d'inertie de la serge  $M_{bs} := M_{serge}$   $J_{bs} := M_{bs} \cdot R_0^2$   $J_{bs} = 299.9 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

Position de la coupure de la serge  $\lambda_0 := (180 - 25) \cdot \text{deg}$

Coefficient de dilatation de la serge  $\alpha_R := \frac{-3}{2} \cdot \frac{R_0}{e_{bs}} \cdot (\alpha_2 - \alpha_1)$   $\alpha_R = -1.618 \times 10^{-4}$

$\alpha' := \alpha_{acier}$   $a(\theta) := R_0 \cdot (1 + \alpha' \cdot \theta) - R(\theta)$   $a(\theta) := R_0 \cdot (\alpha' - \alpha_R) \cdot \theta$

$\Delta J_{bs}(\theta) := M_{serge} \cdot R_0^2 \cdot \left[ 2 \cdot \alpha_R \cdot \theta + 4 \cdot \theta \cdot (\alpha' - \alpha_R) \cdot \frac{\sin(\lambda_0)}{\pi} \right]$   $\Delta J_{bs}(30) = -2.072 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

### Variation du moment d'inertie des vis par déformation thermique de la serge

#### Première estimation de la masse des vis en laiton

$\rho_{lt} = 8.7 \times 10^3 \text{ m}^{-3} \cdot \text{kg}$   $d_{vis} = 1.2 \text{ mm}$   $h_{vis} = 1 \text{ mm}$   $M_{vis} = 9.839 \text{ mg}$   $nb_{vis} = 20$

Admettons les vis également réparties le long de chaque demi-serge  $\Delta\lambda := \frac{2 \cdot \pi}{nb_{vis}}$   $\Delta\lambda = 18 \text{ deg}$

Masse et position de chaque vis :  $j := 0 \dots \frac{nb_{vis}}{2} - 1$   $m_{v_j} := M_{vis}$   $\lambda_j := \lambda_0 - \pi + \frac{\Delta\lambda}{2} + j \cdot \Delta\lambda$

$\lambda_0 - \pi = -25 \text{ deg}$   $\lambda^T = (-16 \ 2 \ 20 \ 38 \ 56 \ 74 \ 92 \ 110 \ 128 \ 146) \text{ deg}$   $\lambda_0 = 155 \text{ deg}$

#### Approximation du moment d'inertie total des vis à température ambiante

$J_{tot\_vis} := 2 \cdot \sum_j \left( m_{v_j} \cdot R_0^2 \right)$   $J_{tot\_vis} = 168.196 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

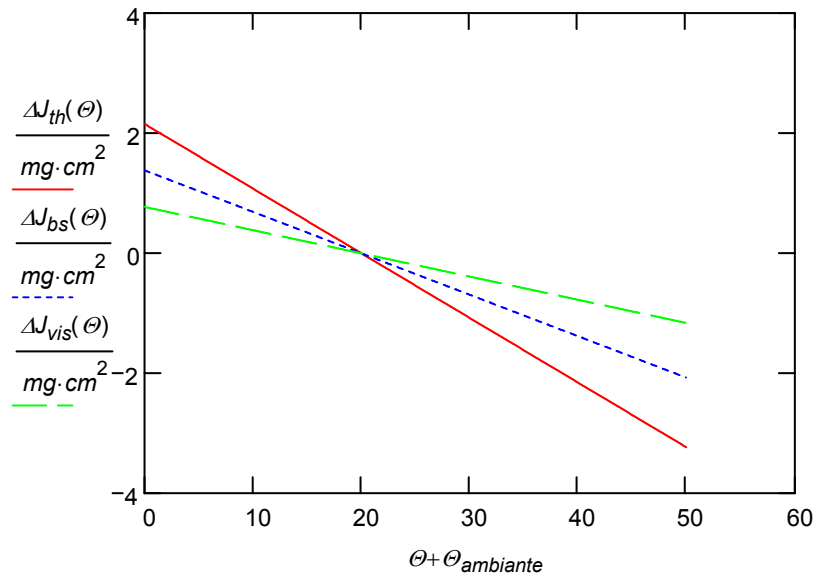
#### Variation du moment d'inertie des vis par déplacement thermique de celles-ci

$\Delta J_{vis}(\theta) := \sum_j \left[ 2 \cdot m_{v_j} \cdot R_0^2 \cdot \left[ \alpha_R + (\alpha' - \alpha_R) \cdot \cos(\lambda_j) \right] \cdot 2 \cdot \theta \right]$   $\Delta J_{vis}(30) = -1.16 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

### Variation thermique totale du moment d'inertie et graphes comparatifs

$\Delta J_{th}(\theta) := \Delta J_{bs}(\theta) + \Delta J_{vis}(\theta)$

$\frac{\Delta J_{th}(30)}{J_{bs} + J_{tot\_vis}} = -0.691 \%$



### Variation de marche totale due à la déformation thermique de la serge

Variation de marche due à la dilatation de la serge  $\delta_{bs}(\vartheta) := \frac{\Delta J_{bs}(\vartheta)}{2 \cdot (J_{bs} + J_{tot\_vis})}$   $\mu_{bs}(\vartheta) := -86400 \cdot \delta_{bs}(\vartheta)$

Variation de marche due au déplacement des vis  $\delta_{vis}(\vartheta) := \frac{\Delta J_{vis}(\vartheta)}{2 \cdot (J_{bs} + J_{tot\_vis})}$   $\mu_{vis}(\vartheta) := -86400 \cdot \delta_{vis}(\vartheta)$

Variation de marche totale (au second ordre près)

$$\delta_b(\vartheta) := \frac{1}{2} \cdot \left[ \alpha_R + 2 \cdot (\alpha' - \alpha_R) \cdot \frac{M_{bs} \cdot \frac{\sin(\lambda_0)}{\pi} + \sum_j (m_{vj} \cdot \cos(\lambda_j))}{M_{bs} + 2 \cdot \sum_j m_{vj}} \right] \cdot 2 \cdot \vartheta$$

$\delta_b(30) = -3.453 \times 10^{-3}$

$\mu_b(\vartheta) := -86400 \cdot \delta_b(\vartheta)$

Valeurs numériques  $\mu_{bs}(30) = 191.236$   $\mu_{vis}(30) = 107.073$   $\mu_b(30) = 298.309$

### Calculs plus précis

Moment d'inertie total des vis à température ambiante

$$J_{t\_vis} := 2 \cdot \sum_j \left[ \frac{m_{vj}}{12} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot d_{vis}^2 + h_{vis}^2 \right) + m_{vj} \cdot \left( \frac{D_{s\_ext}}{2} + \frac{h_{vis}}{2} \right)^2 \right]$$

$J_{t\_vis} = 201.086 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

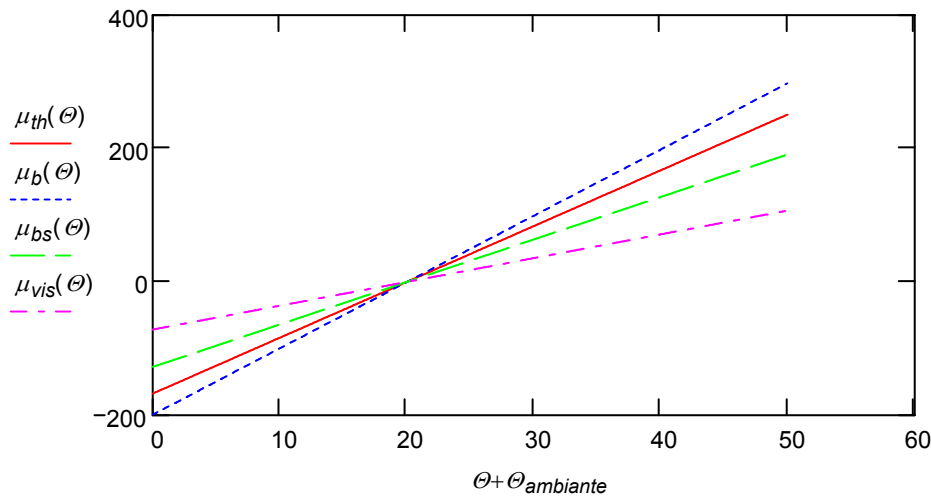
Moment d'inertie de la serge (déjà calculé)

$J_{serge} = 304.306 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

Moment d'inertie total du balancier (avec facteur correctif)  $J_b := 1.1 \cdot (J_{serge} + J_{t\_vis})$   $J_b = 555.931 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

Variation de marche totale  $\delta_{th}(\vartheta) := \frac{\Delta J_{th}(\vartheta)}{2 \cdot (J_b)}$   $\delta_{th}(30) = -2.907 \times 10^{-3}$   $\mu_{th}(\vartheta) := -86400 \cdot \delta_{th}(\vartheta)$

$\mu_{th}(30) = 251.178$



### Condition de compensation

Spiral en acier  $\gamma_0 := \gamma_{ac_0}$   $\gamma_0 = -2.63 \times 10^{-4}$   $\alpha_s := \alpha_{ac_0}$   $\alpha_s = 1.04 \times 10^{-5}$

Variation relative de période due au spiral  $\delta_s(\theta) := \frac{-3}{2} \cdot \alpha_s \cdot \theta$   $\delta_E(\theta) := \frac{-1}{2} \cdot \gamma_0 \cdot \theta$

$$\delta_s(30) + \delta_E(30) = 3.477 \times 10^{-3}$$

Variation relative de période due à la déformation de la serge  $\delta_b(30) = -3.453 \times 10^{-3}$

Modification des masses des deux vis proches de la coupure, les plus éloignées du bras, pour une amélioration de la compensation

Modification de la masse des deux vis n°  $j_{vis} := \frac{nb_{vis}}{2} - 1$   $j_{vis} = 9$   $\lambda_{j_{vis}} = 146 \text{ deg}$

$$X(m_x) := 2 \cdot \left[ \frac{M_{bs} \cdot \frac{\sin(\lambda_0)}{\pi} + \sum_{j=0}^{j_{vis}-1} (m_{v_j} \cdot \cos(\lambda_j)) + m_x \cdot \cos(\lambda_{j_{vis}})}{M_{bs} + 2 \cdot \sum_{j=0}^{j_{vis}-1} m_{v_j} + 2 \cdot m_x} \right]$$

$$m_x := m_{v_{j_{vis}}} \quad m_{v_{j_{vis}}} := \text{racine} \left[ X(m_x) \cdot 10^5 - (\gamma_0 + 3 \cdot \alpha_s) \cdot 10^5, m_x \right]$$

$$m_{v_{j_{vis}}} = 11.012 \text{ mg}$$

$$\delta_b(\theta) := \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{M_{bs} \cdot \frac{\sin(\lambda_0)}{\pi} + \sum_{j=0}^{j_{vis}} (m_{v_j} \cdot \cos(\lambda_j))}{M_{bs} + 2 \cdot \sum_{j=0}^{j_{vis}} m_{v_j}} \right] \cdot 2 \cdot \theta$$

Contrôle  $\delta_s(30) + \delta_E(30) = 3.477 \times 10^{-3}$   $\delta_b(30) = -3.477 \times 10^{-3}$

### Nouveau moment d'inertie du balancier

Moment d'inertie total des vis à température ambiante

$$J_{t\_vis} := 2 \cdot \sum_j \left[ \frac{m_{v_j}}{12} \cdot \left( \frac{3}{4} \cdot d_{vis}^2 + h_{vis}^2 \right) + m_{v_j} \cdot \left( \frac{D_{s\_ext}}{2} + \frac{h_{vis}}{2} \right)^2 \right] \quad J_{t\_vis} = 203.483 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$$

Moment d'inertie de la serge (déjà calculé)  $J_{serge} = 304.306 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

Moment d'inertie total du balancier (avec facteur correctif  $J_b := 1.1 \cdot (J_{serge} + J_{t\_vis})$ )  $J_b = 558.568 \text{ mg} \cdot \text{cm}^2$

### Nouvelle constante élastique du spiral

$$C = 0.136 \text{ m}^2 \text{ N} \cdot \text{m} \quad C_{cor} := \omega_0^2 \cdot J_b \quad C_{cor} = 0.138 \text{ m}^2 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Variation du couple du spiral pour conserver un montre réglée

$$C - C_{cor} = -2.118 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \frac{C - C_{cor}}{C} = -1.558 \%$$

## Graphes des déformations

☞ Référence : D:\Résonateur (TE)\Data\Définition Atan.mcd(R)

### Forme initiale de la serge et du bras

$$n := 400 \quad i := 0..n \quad \Delta\psi := 178 \cdot \text{deg} \quad j := 2..n-2 \quad R_{b_j} := -R_0 + \frac{2 \cdot R_0}{n} \cdot j$$

$$\phi_i := \lambda_0 - \pi + \frac{\Delta\psi}{n} \cdot i \quad x_0(\phi) := R_0 \cdot \cos(\phi) \quad y_0(\phi) := R_0 \cdot \sin(\phi) \quad r_0(\phi) := \sqrt{x_0(\phi)^2 + y_0(\phi)^2}$$

### Déformations thermiques de la serge et du bras

$$\Theta := 50 \quad \text{Facteur d'agrandissement graphique des déformations} \quad Ag := 10 \quad \Theta := Ag \cdot \Theta$$

$$x_{th}(\Theta, \phi) := a(\Theta) + R(\Theta) \cdot \cos(\phi) \quad y_{th}(\Theta, \phi) := R(\Theta) \cdot \sin(\phi) \quad r_{th}(\Theta, \phi) := \sqrt{x_{th}(\Theta, \phi)^2 + y_{th}(\Theta, \phi)^2}$$

$$\beta_i := \text{Atan}(x_{th}(\Theta, \phi_i), y_{th}(\Theta, \phi_i))$$

